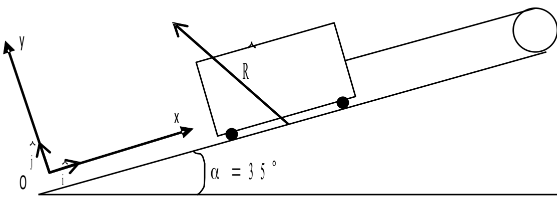
Résolution énergétique de problèmes de mécanique

Monte-charge et travail des forces



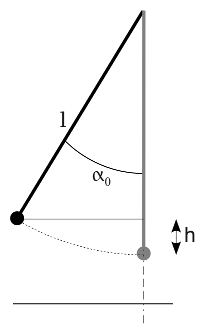
On considère un monte-charge constitué d'un treuil dans sa partie supérieure tirant un chariot de masse $M = 500\,\text{kg}$ sur un plan incliné d'un angle de 35°. On étudie le cas où le chariot est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $v = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ sur le plan incliné.

On considère que la réaction du plan incliné sur les roues du chariot est équivalente à une force unique $\vec{R}$ représentée sans considération ni d'échelle, ni de point d'application sur la figure ci-contre.

Dans tout l'exercice, on prendra $g = 9{,}8\,\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$.

1. Justifier que la force $\vec{R}$ ainsi représentée suppose l'existence de forces de frottements. Dans la suite, on décomposera cette force en ces deux composantes de la façon suivante : $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$.
2. Quelle composante de $\vec{R}$ correspond à la force de frottements ? L'intensité de cette force sera prise égale à 250 N.
3. Compléter le schéma en représentant, sans tenir compte de l'échelle, la force de traction $\vec{F}$ du câble et le poids $\vec{P}$ du chariot.
4. Étude énergétique
   On considère un déplacement du chariot d'une longueur $L = 50\,\text{m}$.
   a. Montrer que la dénivellation entre le point de départ et le point d'arrivée du chariot est $h = 28{,}7\,\text{m}$.
   b. Parmi les forces $\vec{P}$, $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ et $\vec{F}$, quelles sont celles dont les travaux sont moteurs, résistants ou nuls ? Justifier.
   c. Donner les expressions littérales de travaux des forces $\vec{P}$, $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ et $\vec{F}$.
   d. D'après l'énoncé, que peut-on dire de l'énergie cinétique du chariot ?
   e. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au chariot, donner l'expression littérale du travail de la force $\vec{F}$, $W(\vec{F})$.
   f. Montrer que $W(\vec{F}) = 1{,}53\cdot 10^5\,\text{J}$ et que $F = 3{,}06\cdot 10^3\,\text{N}$.
   g. On définit la puissance d'une force comme le produit scalaire de la force par le vecteur vitesse : $P(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{v}$.
   Calculer la puissance $P(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$.

Pendule simple



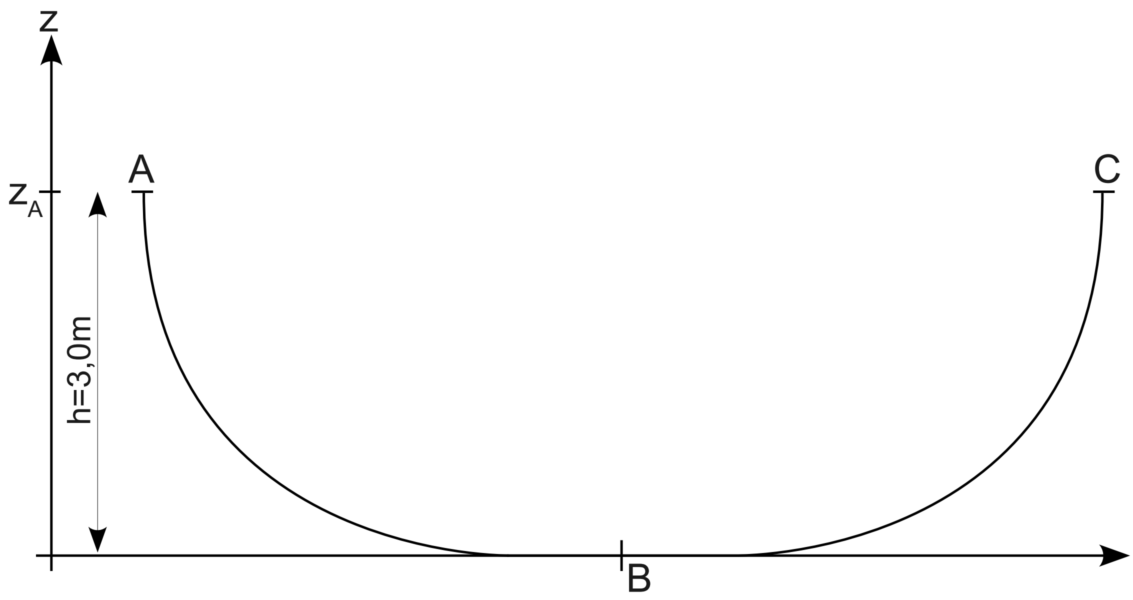
Un pendule simple est constitué d'une masse $m = 25{,}0\,\text{g}$ suspendue à un fil de longueur *l*. On néglige toute force de frottements lors du mouvement. On repère la position du pendule par l'angle α entre la verticale et la direction du fil. $\alpha \in [-90°; 90°]$

On s'intéresse à la portion de mouvement entre le point de départ et le passage par la verticale.

1. Montrer que la force de tension exercée par le fil ne travaille pas au cours du mouvement.
2. Montrer que la différence de hauteur h s'exprime de la façon suivante : $h = l \times (1 - \cos\alpha_0)$.
3. On cherche à déterminer la vitesse du pendule lors de son passage en position verticale. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et la verticale, donner l'expression littérale de la vitesse v_f du pendule lorsque $\alpha = 0°$ en fonction de *g*, *l*, et α_0.
4. Calculer v_f pour $l = 30$ cm et $\alpha_0 = 25°$.
5. Pour quelle valeur de l'angle α_0 la vitesse v_f est-elle maximale ? Calculer cette valeur.
6. Quelle modification faut-il apporter à la longueur *l* du fil si on souhaite multiplier par quatre la vitesse v_f pour un même angle de départ α_0 ?

Théorème de l'énergie cinétique dans un half-pipe

On considère le mouvement d'un snowboardeur dans un half-pipe dont le profil et les caractéristiques utiles sont représentés ci-dessous.



Le snowboardeur de masse totale $m = 80$ kg s'élance du point A avec une vitesse $v_A = 3{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$. On se propose de calculer sa vitesse en différents points de la piste dans divers cas de figure en appliquant le théorème de l'énergie cinétique. On négligera les frottements de l'air, en revanche, les frottements de la piste seront modélisés par une force unique $\vec{f}$. Outre les frottements, le snowboardeur est soumis à l'action de son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ orthogonale à la piste. Dans tout l'exercice on prendra $g = 9{,}8\ \mathrm{N.kg^{-1}}$.

1. Quelle est la valeur du travail de la force $\vec{R}$ sur un déplacement quelconque le long de la piste ? Justifier.
2. En négligeant l'action des forces de frottement et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B, donner l'expression de la vitesse v_B du snowboardeur au point B et effectuer l'application numérique.
3. En l'absence de forces de frottement, quelle serait la vitesse du snowboardeur au point C ?
4. En réalité, le travail des forces de frottement lors du trajet AC est $W_{A\to C}(\vec{f}) = -270$ J.
   a. Commenter le signe de ce travail.
   b. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et C établir l'expression littérale de la vitesse du snowboardeur au point C et effectuer l'application numérique.
5. Sans réponse à la question précédente, on prendra $v_C = 1{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$. En l'absence d'impulsion supplémentaire, à quelle hauteur **h'** le snowboardeur peut-il espérer monter avec cette vitesse supposée verticale ?
6. Les conditions climatiques changent et la neige commence à fondre. Cela a pour conséquence d'augmenter les frottements. La vitesse au point C est alors $v_C = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Déterminer le travail $W_{A\to C}(\vec{f})$ des forces de frottement.