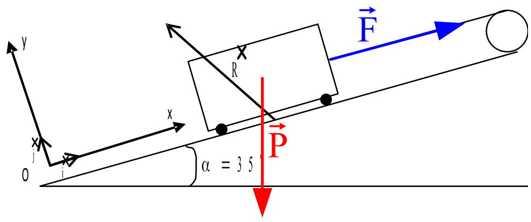
Monte-charge et travail des forces

1. La force $\vec{R}$ n'est pas orthogonale au support, donc elle est comporte une composante vectorielle colinéaire au déplacement et opposée à celui-ci : les frottements du support.

2. La composante correspondant aux frottements est la composante tangente au support : $\vec{R}_X$.

3.



4.a. En appliquant les relations de trigonométrie dans un triangle rectangle, on a $\sin\alpha = \dfrac{h}{L}$.

Soit $h = L \cdot \sin\alpha$.

Application numérique : $h = 50 \times \sin 35° \simeq 28{,}7\,\text{m}$.

4.b. Le chariot prend de la hauteur, donc le poids est résistant.

$\vec{F}$ est dirigée dans le sens du mouvement, donc son travail est moteur.

$\vec{R}_y$ est orthogonal au déplacement, donc son travail est nul.

$\vec{R}_x$ est colinéaire au déplacement et en sens opposé : son travail est résistant.

4.c. Travail du poids : $W_L(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot h$

Travail de la composante $\vec{R}_x$: $W_L(\vec{R}_x) = -R_x \times L$

Travail de la composante $\vec{R}_y$: $W_L(\vec{R}_y) = 0$

Travail de la force de traction $\vec{F}$: $W_L(\vec{F}) = F \times L$

4.d. D'après l'énoncé, le chariot est en mouvement rectiligne uniforme, sa vitesse est donc constante donc son énergie cinétique est constante lors du déplacement.

4.e. Théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique d'un système est égale à la somme des travaux des forces appliquées.

Donc $\Delta E_C = W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{R}_x) + W_L(\vec{F})$.

D'après la réponse 4.d., $W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{R}_x) + W_L(\vec{F}) = 0$

Donc $-m \cdot g \cdot h - R_x \times L + W_L(\vec{F}) = 0$

Soit $W_L(\vec{F}) = m \cdot g \cdot h + R_x \times L$

4.f. Application numérique :

$W_L(\vec{F}) = 500 \times 9{,}8 \times 28{,}7 + 250 \times 50 = 1{,}53 \times 10^5\,\text{J}$

$$F = \frac{W_L(\vec{F})}{L}$$

$$F = \frac{1{,}53 \times 10^5}{50} = 3{,}06 \times 10^3\,\text{N}$$

4.g. Par définition, $P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

$P(\vec{F}) = F \times v$, car $\vec{F}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

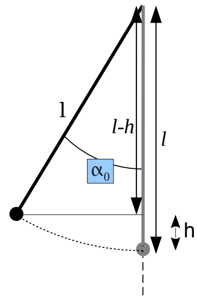
Application numérique :

$P(\vec{F}) = 3{,}06 \times 10^3 \times 2{,}0 = 6{,}12 \times 10^3\,\text{W}$

Pendule simple

1. La force de tension exercée par le fil est dirigée suivant le fil et pointe vers le point de suspension. Elle est donc dirigée constamment suivant un rayon de la trajectoire. À chaque instant, elle est orthogonale au vecteur vitesse, donc au déplacement. Son travail est donc nul.

2. En appliquant les relations de trigonométrie dans le triangle rectangle avec les dimensions de la figure ci-contre, on a :



$$\cos\alpha_0 = \frac{l-h}{l}$$

Soit : $l \times \cos\alpha_0 = l - h$

Donc $h = l - l \times \cos\alpha_0$

Finalement $h = l \times (1 - \cos\alpha_0)$

3. Théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au système.

Ici, seul le poids travaille, donc :

$$\Delta E_C = W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{Cf} - \underbrace{E_{Ci}}_{=0} = m \cdot g \cdot h$$
$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_f^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha_0)$$

Soit $v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha_0)}$

4. Application numérique :

$$v_f = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}30 \times (1 - \cos 25°)} \simeq 0{,}742 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. La vitesse est maximale lorsque $(1 - \cos\alpha_0) = 1$, soit pour un angle $\alpha_0 = 90°$.

Dans ce cas :

$$v_{fMax} = \sqrt{2 \cdot g \cdot l}$$

Numériquement : $v_{fMax} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}30} \simeq 2{,}42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

6. D'après l'expression littérale établie à la question 3, la vitesse maximale varie proportionnellement à la racine carrée de la longueur l du pendule. Donc pour multiplier la vitesse par quatre, il faudra multiplier la longueur du pendule par 16 $(\sqrt{16} = 4)$.

Théorème de l'énergie cinétique dans un half-pipe

1. Si on néglige les frottements, la réaction $\vec{R}$ est orthogonale au support. Elle est donc constamment perpendiculaire au déplacement, son travail est nul.

2. En l'absence de frottement, seul le poids $\vec{P}$ travaille.

$$\Delta E_C = W_{AB}(\vec{P})$$
$$E_C(B) - E_C(A) = m \cdot g \cdot h$$
$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h$$
$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + v_A^2}$$

Application numérique : $v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 3{,}0 + 3{,}0^2} \simeq 8{,}23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. Seul le poids travaille et le point C est à la même hauteur que le point A. La vitesse en C est donc identique à la vitesse au point A : $v_C = 3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.a. Le travail est négatif. Les frottements dissipent de l'énergie, leur travail est donc résistant.

4.b. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et C, on a :

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_C^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2=W_{AC}(\vec{P})+W_{AC}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_C^2=\underbrace{W_{AC}(\vec{P})}_{=0}+W_{AC}(\vec{f})+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$$

$$v_C=\sqrt{\frac{2\cdot W_{AC}(\vec{f})}{m}+v_A^2}$$

Application numérique :

$$v_C=\sqrt{\frac{-2\times 270}{80}+3{,}0^2}\simeq 1{,}5\,m\cdot s^{-1}$$

5. On note D le point le plus haut atteint par le snowboardeur après avoir décollé en C avec la vitesse initiale $v_C=1{,}5\,m\cdot s^{-1}$. On note z_D la hauteur de ce point.

Théorème de l'énergie cinétique appliqué entre le point C et le point D :

$$\underbrace{E_C(D)}_{=0}-E_C(C)=W_{CD}(\vec{P})$$

$$-\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v_C^2=\cancel{m}\cdot g\cdot(z_C-z_D)$$

donc $$z_D=z_C+\frac{v_C^2}{2\cdot g}$$

Application numérique : $$z_D=3{,}0+\frac{1{,}5^2}{2\times 9{,}8}\simeq 3{,}11\,m$$

6. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et C en tenant compte des nouvelles conditions de neige.

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_C^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2=\underbrace{W_{AC}(\vec{P})}_{=0}+W_{AC}(\vec{f})$$

$$W_{AC}(\vec{f})=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_C^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$$

$$W_{AC}(\vec{f})=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(v_C^2-v_A^2)$$

Application numérique :

$$W_{AC}(\vec{f})=\frac{1}{2}\times 80\times(0{,}5^2-3{,}0^2)\simeq -350\,J$$